

Оценка снизу скорости блуждания решения линейного дифференциального уравнения третьего порядка через частоту нулей

Тихомирова А.В.

В работе сравниваются две характеристики решений линейных дифференциальных уравнений 3-го порядка с переменными коэффициентами. Доказано, что для решения на конечном отрезке длина проекции фазовой кривой на единичную сферу оценивается снизу через число нулей решения. В предельном случае, когда длина отрезка стремится к бесконечности, рассматриваются соответствующие средние величины: скорость блуждания и частота нулей, и для их отношения получена точная нижняя оценка.

1. Описание исследуемых величин

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t) \dot{y} + a_n(t) y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

с переменными коэффициентами $a_1, \dots, a_n \in C(\mathbb{R}^+)$. Обозначим через $\nu(y, t)$ число нулей решения y на промежутке $[0, t]$.

Определение 1. Назовем *нижней* (соотв. *верхней*) *частотой нулей* решения y величину

$$\check{\nu}(y) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu(y, t) \quad \left(\text{соотв. } \hat{\nu}(y) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu(y, t) \right).$$

Если эти пределы равны, то их общее значение $\nu(y)$ назовем *точной частотой нулей* решения y .

Определение 2. Назовем *нижней* (соотв. *верхней*) *скоростью блуждания* вектор-функции $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ величину

$$\check{\mu}(x) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t) \quad \left(\text{соотв. } \hat{\mu}(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t) \right), \quad (2)$$

где

$$\gamma(x, t) = \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} \right) \right| d\tau, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Если для функции x пределы (2) равны, то их общее значение $\mu(x)$ назовем *точной скоростью блуждания* вектор-функции x .

Геометрическая интерпретация величины $\gamma(x, t)$: $\gamma(x, t)$ — это длина траектории единичного вектора $\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|}$ за время от 0 до t .

Нас будут интересовать величины $\gamma(x, t)$ и $\mu(x)$ в случае равенства $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$, где y — решение уравнения (1). В этом случае будем обозначать:

$$\gamma_n(y, t) = \gamma(x, t), \quad \check{\mu}_n(y) = \check{\mu}(x), \quad \hat{\mu}_n(y) = \hat{\mu}(x), \quad (3)$$

В работе [2] рассматривались более общие функционалы решений, в частности,

$$\hat{\zeta}(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \nu\left(\sum_{i=1}^n x_i m_i, t\right) \quad \left(\check{\zeta}(x) = \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \nu\left(\sum_{i=1}^n x_i m_i, t\right) \right),$$

$$\hat{\eta}(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut}(\mathbb{R}^n)} \gamma(Lx, t) \quad \left(\check{\eta}(x) = \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut}(\mathbb{R}^n)} \gamma(Lx, t) \right),$$

и для них были получены оценки:

$$\check{\eta}(x) \geq \check{\zeta}(x), \quad \hat{\eta}(x) \geq \hat{\zeta}(x),$$

не зависящие от n . Изменяя допустимые области значений автоморфизма L и направления t , получаем другие варианты величин, для которых можно тоже ставить вопрос об их сравнимости.

В настоящей работе исследуется случай, когда пространство трехмерно, L всегда тождественен, а $m \equiv (1, 0, 0)$. Приведенные доказательства существенно используют, что пространство трехмерно, и поэтому результаты относятся только к трехмерному случаю.

2. Формулировка результатов

В данной работе рассматривается случай $n = 3$, когда (1) имеет вид

$$y'''(t) + a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0, \quad a, b, c \in C(\mathbb{R}^+). \quad (1')$$

Обозначим

$x = (x_0, x_1, x_2) = (y, \dot{y}, \ddot{y})$ — точка в фазовом пространстве,
 Ω_+ — область $\{x_0 x_2 - x_1^2 > 0, x_2 > 0\}$ на сфере $|x| = 1$ в фазовом пространстве
 $\partial\Omega_+$ — граница области Ω_+ на единичной сфере,
 L_Ω — длина $\partial\Omega_+$ (абсолютная постоянная). В Добавлении показано, что

$$L_\Omega = 4 \int_0^\pi \frac{\sqrt{5 - \cos \alpha}}{7 + \cos \alpha} d\alpha.$$

Теорема 1 Для любого ненулевого решения y уравнения (1') и любого $t > 0$ верна оценка

$$\gamma_3(y, t) > \frac{\nu(y, t) - 5}{2} L_\Omega.$$

Теорема 2

а) Для любого ненулевого решение y уравнения (1') верны оценки

$$\hat{\mu}_3(y) \geq \frac{L_\Omega}{2\pi} \hat{\nu}(y), \quad \check{\mu}_3(y) \geq \frac{L_\Omega}{2\pi} \check{\nu}(y).$$

б) Для любого $\varepsilon > 0$ существуют гладкие функции a, b, c и y , связанные равенством (1'), такие что $\mu_3(y) < \left(\frac{L_\Omega}{2\pi} + \varepsilon\right) \nu(y)$.

3. Доказательства.

В случае $n = 3$ фазовая кривая примет вид $x(t) = (y(t), y'(t), y''(t))$. Обозначим $\kappa(t) := \frac{x(t)}{|x(t)|}$ — проекция фазовой кривой на единичную сферу. Если решение ненулевое ($x(t) \neq 0$), то по теореме единственности $\forall t \ x(t) \neq 0 \Rightarrow |x(t)| > 0 \Rightarrow \kappa(t)$ определено в любой точке, т.е. определение корректно.

Введем следующие обозначения:

Ω — область $\{x_2 x_0 - x_1^2 > 0\}$ на сфере $|x| = 1$ в фазовом пространстве ;

Ω_- — часть области Ω , где $x_2 < 0$.

Таким образом, $\Omega = \Omega_+ \sqcup \Omega_-$.

В дальнейшем будем отождествлять $x(t)$ с вектором $(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t))$. Допустим, что y и \dot{y} одновременно не обращаются в 0. Перейдем к сферической системе координат:

$$\begin{cases} y = |x(t)| \cos \theta \cos \varphi, \\ \dot{y} = |x(t)| \cos \theta \sin \varphi, \\ \ddot{y} = |x(t)| \sin \theta. \end{cases}$$

Выразим $\dot{\varphi}$ через y , \dot{y} и \ddot{y} :

Лемма 1

$$\dot{\varphi} = \frac{\ddot{y}y - \dot{y}^2}{y^2 + \dot{y}^2}. \quad (4)$$

► Для тех точек, где $y \neq 0$ выполнено $\frac{\dot{y}}{y} = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{y}}{y} \right) = \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} = \dot{\varphi}(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = \dot{\varphi} \left(1 + \frac{\dot{y}^2}{y^2} \right)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\frac{\ddot{y}y - \dot{y}^2}{y^2}}{1 + \frac{\dot{y}^2}{y^2}} = \frac{\ddot{y}y - \dot{y}^2}{y^2 + \dot{y}^2}$$

Аналогично, для точек, где $\dot{y} \neq 0$, выполнено $\frac{y}{\dot{y}} = \operatorname{ctg} \varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{y}}{y'} \right) = -\frac{\dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} = -\dot{\varphi}(1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) = -\dot{\varphi} \left(1 + \frac{y^2}{\dot{y}^2} \right);$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\frac{\dot{y}^2 - \ddot{y}y}{\dot{y}^2}}{1 + \frac{y^2}{\dot{y}^2}} = \frac{\ddot{y}y - \dot{y}^2}{y^2 + \dot{y}^2}.$$

Мы предположили, что $\forall t \ y(t) \neq 0$ или $\dot{y}(t) \neq 0$, утверждение леммы всюду выполнено. ◀

Отсюда $\dot{\varphi}(t) > 0 \Leftrightarrow \ddot{y}(t)y(t) - \dot{y}^2(t) > 0 \Leftrightarrow \kappa(t) \in \Omega$.

Найдем границу области Ω в сферических координатах.

$$0 < \ddot{y}(t)y(t) - \dot{y}^2(t) = |x(t)|^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi - |x(t)|^2 (\cos \theta \sin \varphi)^2.$$

Вне полюсов $\cos \theta > 0$, поэтому поделим неравенство на положительное число $|x(t)|^2 \cos^2 \theta$. Тогда: $\dot{\varphi} > 0 \Leftrightarrow \sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin^2 \varphi > 0$, и граница Ω будет иметь вид:

$$\theta = \theta_0(\varphi) := \arctan \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, \varphi \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}. \quad (5)$$

Заметим, что при $y = 0$, $\dot{\varphi} = \frac{-\dot{y}^2}{\dot{y}^2} = -1$, поэтому большая окружность (пересечение сферы и плоскости $y = 0$) не пересекает область Ω . В сферических координатах $y = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Отсюда видно, что аналогично 2-мерному случаю между двумя нулями функции y величина φ должна уменьшиться на π (расстояние между 2-мя соседними нулями косинуса). Причем внутри области Ω величина φ увеличивается, а вне — уменьшается. Обозначим за $P(\varphi, \theta)$ точку на сфере со сферическими координатами φ и θ .

Введем еще одно обозначение: Ω_- — область на сфере в фазовом пространстве $\{\ddot{y}y - \dot{y}^2 > 0, \ddot{y} < 0\}$. Таким образом, $\Omega = \Omega_+ \sqcup \Omega_-$.

Лемма 2 Область Ω состоит из двух выпуклых областей Ω_+ и Ω_- , центрально симметричных относительно 0 и зеркально симметричных относительно плоскости $\pi_\Omega: \ddot{y} + y = 0$, причем полюсы введенной сферической системы координат лежат на ее границе.

►

На сфере определение выпуклости эквивалентно следующему: множество M на сфере выпукло, если множество $\{\alpha x : x \in A, \alpha \geq 0\}$ — выпукло в \mathbb{R}^3 (т.е. множество, состоящее из лучей, проведенных из центра сферы во все точки множества A). Для области Ω это все $(y, \dot{y}, \ddot{y}) : y\ddot{y} - \dot{y}^2 > 0$. Проверим, что это внутренность эллиптического конуса, для этого сделаем линейную замену координат:

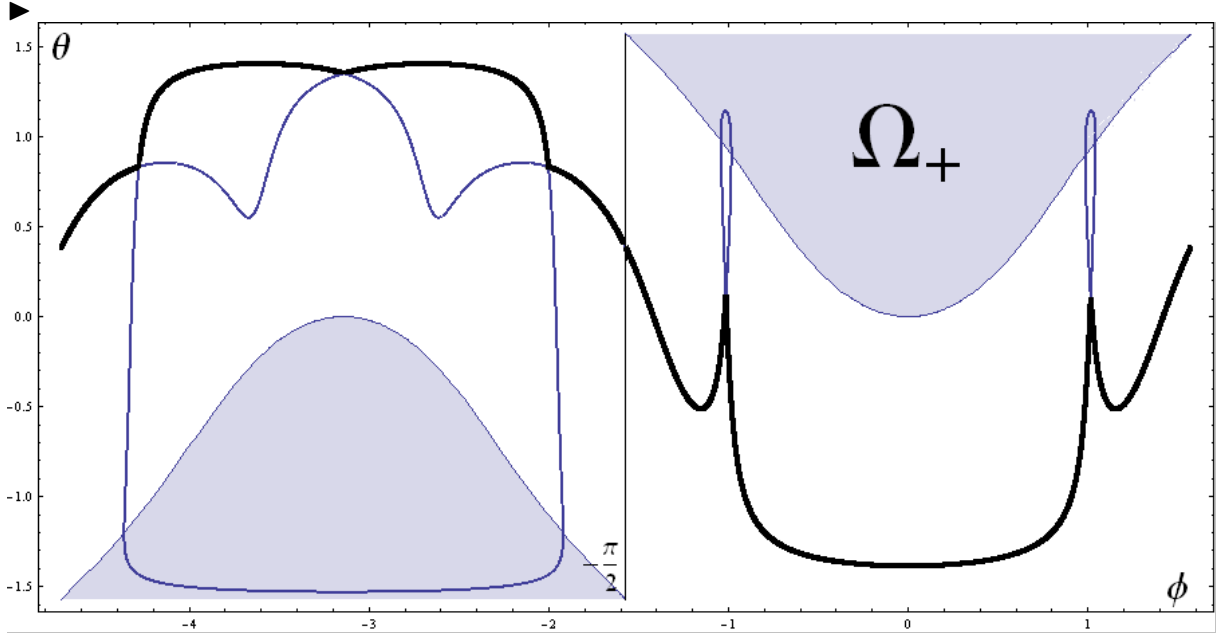
$$\begin{cases} y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}, \\ \ddot{y} = \frac{u-v}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Тогда та же область будет иметь вид в новых координатах: $\frac{u^2 - v^2}{2} - \dot{y}^2 > 0 \Leftrightarrow u^2 = v^2 + 2\dot{y}^2$, что является внутренностью эллиптического конуса. Эллиптический конус состоит из двух выпуклых частей, центрально симметричных относительно 0 и зеркально симметричных относительно плоскости $u = 0$, или, делая обратную замену, плоскости $y + \ddot{y} = 0$. Здесь важно, что замена ортогональная, поэтому зеркальная симметрия при ней сохраняется. Такой же симметрией обладает и пересечение конуса со сферой, что и требовалось доказать. Обозначим за Ω_+ ту часть, где $u > 0$ и Ω_- — где $u < 0$. Для полюсов, т.е. точек с координатами $(0, 0, \pm 1)$ выполняется равенство $0c - 0^2 = 0 \Rightarrow$ такие точки находятся на границе области Ω .

◀

Лемма 3 Пусть наша кривая $\kappa(t) = P(\varphi(t), \theta(t)), t \in [t_0, t_1]$ не проходит через полюсы сферы и $\begin{cases} \varphi(t_0) \equiv \varphi(t_1) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ \varphi(t_1) = \varphi(t_0) - 2\pi \end{cases}$, т.е. она делает один оборот вокруг полюса по часовой стрелке.

Тогда из нее можно выбросить некоторые части так, чтобы осталась непрерывная кривая $\tilde{\kappa} : [0; 1] \rightarrow S^2 \setminus \Omega$, концы которой совпадают с концами κ , т.е. $\tilde{\kappa}(0) = \kappa(t_0), \tilde{\kappa}(1) = \kappa(t_1)$.



I. Сначала покажем, что $\forall a \in [\varphi(t_1); \varphi(t_0)] \exists t_a \in (t_0; t_1) : \varphi(t) = a$ и $\dot{\varphi}(t) \leq 0$: Пусть $t_a := \sup \{t : \varphi(t) \geq a\}$. Тогда $\varphi(t_a + h) < a$ при $h > 0$, значит из непрерывности $\varphi(t)$ сразу следует, что

$$\begin{cases} \varphi(t_a) \geq a, \\ \varphi(t) = \lim_{h \rightarrow +0} \varphi(t_a + h) \leq a \end{cases} \Rightarrow \varphi(t_a) = a;$$

$$\dot{\varphi}(t_a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t_a + h) - \varphi(t_a)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\varphi(t_a + h) - a}{h} \leq 0.$$

Поскольку $\dot{\varphi}(t_a) \leq 0$, то $\kappa(t_a) \notin \Omega$. Также можно заметить, что $\exists t_{1/2} : \varphi(t_{1/2}) = \varphi(t_0) - \pi \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \Rightarrow \dot{\varphi}(t_{1/2}) < 0$, значит через "прямую" $\varphi = \varphi(t_{1/2})$ можно перейти только в одну сторону, а значит только один раз (на это прямая $-\frac{\pi}{2}$).

Поэтому достаточно выделить часть кривой κ , соединяющую $\kappa(t_0)$ и $\kappa(t_{1/2})$, не пересекающуюся с Ω , а потом часть, соединяющую $\kappa(t_{1/2})$ и $\kappa(t_1)$. При этом поиск второй части аналогичен первой, достаточно поменять знак t и поменять $-t_0$ и $-t_1$ местами. Поэтому осталось доказать, что из части $\{\kappa(t) : t \in [t_0; t_{1/2}]\} \setminus \Omega$ можно выделить кривую, соединяющую $\kappa(t_0)$ и $\kappa(t_{1/2})$.

II. Будем теперь рассматривать все на отрезке $[t_0; t_{1/2}]$. Здесь $\varphi(t) \in [\varphi(t_0) - \pi, \varphi(t_0)]$, поэтому область Ω имеет вид $\frac{\pi}{2} > \theta > \theta_0(\varphi)$ (граница области Ω).

Обозначим $M := \{\kappa(t) : t \in [t_0; t_{1/2}]\} \setminus \Omega$, $M_a := \{\theta(t) : \varphi(t) = a, \kappa(t) \notin \Omega\}$ – выпускаем из полюса сферы лучи под углом a и пересекаем его с множеством M . (А на рисунке M_a – пересечение вертикальной линии с графиком κ вне области Ω)

$t_a \in M_a$ (по определению t_a) $\Rightarrow M_a$ непусто. Из того, что $\kappa(t)$ пересекает полуокружности $\varphi = \varphi(t_0)$ и $\varphi = \varphi(t_0) - \pi$ по одному разу следует, что

$$M_{\varphi(t_0)} = \{\theta(t_0)\}, M_{\varphi(t_{1/2})} = \{\theta(t_{1/2})\}. \quad (6)$$

III. Рассмотрим функцию $\Theta(a) := \min M_a$ на отрезке $[\varphi(t_{1/2}), \varphi(t_0)]$. (На рисунке это выделено жирной линией). Тогда $P(a, \Theta(a)) \in M$. Из (6) получаем, что $\Theta(\varphi(t_0)) =$

$\theta(t_0), \Theta(\varphi(t_{1/2})) = \theta(t_{1/2})$, поэтому

$$\begin{aligned} P(\varphi(t_0), \Theta(\varphi(t_0))) &= P(\varphi(t_0), \theta(t_0)) = \kappa(t_0), \\ P(\varphi(t_{1/2}), \Theta(\varphi(t_{1/2}))) &= P(\varphi(t_{1/2}), \theta(t_{1/2})) = \kappa(t_{1/2}). \end{aligned}$$

Осталось показать, что $\Theta(a)$ непрерывна на своей области определения. Допустим, a_0 — точка разрыва. Тогда есть две возможности:

- $\Theta(a_0) > y_0 := \lim_{a \rightarrow a_0} \Theta(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(a_n)$ для некоторой последовательности $a_n \rightarrow a$.
Поскольку $M = [\kappa] \setminus \Omega$ — замкнутое множество, а $P(a_n, \Theta(a_n)) \in M$, то $P(a_0, y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n, y_n) \in M$, поэтому $y_0 \in M_{a_0} \Rightarrow \Theta(a_0) \leq y_0$ — противоречие.
- $\Theta(a_0) < y_0 := \overline{\lim}_{a \rightarrow a_0} \Theta(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(a_n)$ для некоторой последовательности $a_n \rightarrow a$.
Аналогично предыдущему случаю, $P(a_0, y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n, y_n) \in M$, поэтому $y_0 \leq \theta_0(a_0) \Rightarrow \Theta(a_0) < \theta_0(a_0)$.
 $\Theta(a_0) = \theta(t), a_0 = \varphi(t)$ для некоторого t . При этом $\theta(t) < \theta_0(\varphi(t)) \Rightarrow \kappa(t) \notin \partial\Omega \Rightarrow \dot{\varphi}(t) > 0$. Тогда по теореме об обратной функции

$$\exists t(a), \delta > 0 : t(a_0) = t, \forall a : |a - a_0| < \delta \Rightarrow \varphi(t(a)) = a.$$

Из непрерывности $\theta(t(a))$,

$$\exists 0 < \delta_1 \leq \delta : \forall a : |a - a_0| < \delta_1 \Rightarrow \underbrace{|\theta(t(a)) - \theta(t(a_0))|}_{\in M_a} < \frac{y_0 - \Theta(a_0)}{2}.$$

Отсюда при $|a - a_0| < \delta_1$ $\min M_a \leq \theta(t(a)) \leq \Theta(a_0) + \frac{y_0 - \Theta(a_0)}{2}$, значит $\overline{\lim}_{a \rightarrow a_0} \leq \Theta(a_0) + \frac{y_0 - \Theta(a_0)}{2} < y_0$ — противоречие.

Значит $\Theta(a)$ непрерывна, а следовательно, кривая $P(a, \Theta(a))$ и есть искомая.

Параметризацию всегда можно выбрать так, чтобы новая кривая была определена на отрезке $[0; 1]$. Это всегда можно сделать масштабированием. Длина кривой от параметризации не зависит, а нас в конечном итоге интересует ее длина.

◀

Пусть есть точка M на сфере и кривая $\gamma : [0; 1] \rightarrow S$, причем точки M и противоположная ей не лежат на γ . Определим индекс точки M на сфере относительно кривой γ . Введем сферическую систему координат с полюсом в точке M .

Лемма 4 *Существует кратчайшая замкнутая кривая $l : [0; 1] \rightarrow S \setminus \Omega$, для которой в сферических координатах*

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \varphi(1) = 2\pi n \text{ (кривая делает } n \text{ оборотов вокруг полюса),} \\ \theta(0) &= \theta(1) \text{ (кривая замкнута).} \end{aligned}$$

► Рассмотрим множество $K := \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : P(\varphi, \theta) \in S \setminus \Omega\}$. На этом множестве введем риманову метрику, соответствующую метрике на сфере: $g_{ij}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим K , как метрическое пространство с функцией расстояния ρ_S , порожденной метрикой g_{ij} :

$$\rho_S(x, y) := \inf_{\gamma: [0;1] \rightarrow K: \gamma(0)=x, \gamma(1)=y} \int_0^1 \sqrt{\varphi'^2(s) \cos^2 \theta + \theta'^2(s)}.$$

Все точки $x, y : \rho_S(x, y) = 0$ будем считать совпадающими. Это те точки, которые соответствуют полюсам сферы, т.е. где $|\theta| = \frac{\pi}{2}$ и φ отличается не более, чем на π . Тогда K — замкнутое локально компактное метрическое пространство. Отсюда по следствию из теоремы Хопфа-Ринова [1, теор.10.9] существует кратчайшая, соединяющая любые 2 точки из K . То есть \inf в определении ρ_S на самом деле достигается.

Отображение $(\varphi, \theta) \rightarrow P(\varphi, \theta)$, переводящее K в $S \setminus \Omega$, по построению является локально изометричным, поэтому длины кривых сохраняются. А значит длина кривой γ , заданной в сферических координатах $\gamma(s) = P(\varphi(s), \theta(s))$, будет равна длине кривой $(\varphi(s), \theta(s))$ в множестве K . Поэтому поиск кратчайшей замкнутой кривой сводится к поиску кривой наименьшей длины в K , с теми же условиями, то есть

$$\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 2\pi n, \theta(0) = \theta(1). \quad (7)$$

Длина любой кривой, удовлетворяющей этим условиям, не менее $\rho_S((0, \theta(0)), (2\pi n, \theta(1))) = \rho_S((0, a), (2\pi n, a)), \theta(0) = \theta(1) = a$.

Пусть $L(a) := \rho_S((0, a), (2\pi n, a)), |a| \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда по неравенству треугольника

$$L(b) \leq \underbrace{\rho_S((0, b), (0, a))}_{\leq |b-a|} + \underbrace{\rho_S((0, a), (2\pi n, a))}_{L(a)} + \underbrace{\rho_S((2\pi n, a), (2\pi n, b))}_{\leq |b-a|} \leq 2|b-a| + L(a).$$

Отсюда $|L(b) - L(a)| \leq 2|b-a|$, откуда следует, что функция L непрерывна. Значит она достигает своего минимума на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ в некоторой точке a_0 . Пусть l_0 — кратчайшая, соединяющая $(0, a_0)$ и $(2\pi n, a_0)$. Тогда она удовлетворяет условиям (7) и по построению ее длина, равная $L(a_0) < L(a)$, не превосходит любой другой кривой, удовлетворяющей (7). Отображение $(\varphi, \theta) \rightarrow P(\varphi, \theta)$ кривой l_0 на сферу и будет искомой кривой l .

◀

Поскольку кривая замкнута, то условия на кривую эквивалентны следующим:

$$|\varphi(t_0) - \varphi(t_1)| = 2\pi n,$$

$$\theta(t_0) = \theta(t_1).$$

для некоторых $t_1 > t_0$. Заменой параметризации и начальной точки кривой, этот случай сводится к рассмотренному в лемме 4.

Лемма 5 Пусть кривая $\tilde{\kappa}(t) = P(\varphi(t), \theta(t)), t \in [t_0; t_1]$ не пересекает Ω и $\varphi(t_1) = \varphi(t_0) - 2\pi N$, не проходит через полюсы ($\theta(t) \neq \pm \frac{\pi}{2}$) и каждое значение φ принимает ровно 1 раз.

Тогда ее длина не менее, чем $NL_\Omega - |\theta(t_1) - \theta(t_0)|$.

►

Сведем задачу к замкнутой кривой на полусфере, обходящей N раз выпуклую кривую $\partial\Omega$. Для этого сначала добавим к кривой дугу большой окружности, соединяющей $\tilde{\kappa}(t_0)$ и $\tilde{\kappa}(t_1)$; т.к. $\varphi(t_1) = \varphi(t_0) - 2\pi N \equiv \varphi(t_0) \pmod{2\pi}$, то длина этой дуги равна $|\theta(t_1) - \theta(t_0)|$. Обозначим полученную замкнутую кривую \tilde{l} . Пусть l — кратчайшая замкнутая кривая с условиями $|\varphi(t_0) - \varphi(t_1)| = 2\pi n, \theta(t_0) = \theta(t_1)$, существующая по лемме 3. Тогда длина \tilde{l} не меньше, чем длина l .

Отразим теперь часть сферы $\ddot{y} + y < 0$ относительно плоскости $\ddot{y} + y = 0$. При этом Ω_- перейдет в Ω_+ по лемме 2. Такая симметрия — непрерывное преобразование, поэтому наша замкнутая кривая l перейдет в замкнутую кривую, которую обозначим за $g(t)$. Ее длина будет равна длине l , поскольку ее часть, отличная от l , получена из l ортогональным преобразованием (отражением), которое сохраняет метрику. Таким образом, g — тоже кратчайшая замкнутая кривая, как и l , но уже лежащая на полусфере.

Покажем, что кривая g целиком лежит на $\partial\Omega_+$. Поскольку g — кратчайшая кривая, то она должна быть локально кратчайшей, поэтому если $g(t) \notin \partial\Omega, t \in (a; b)$, то участок $g([a; b])$ должен быть геодезической, соединяющей точки $l(a)$ и $l(b)$, то есть дугой большой окружности. Отсюда следует, что $g([0; 1])$ состоит из частей $\partial\Omega$, соединенных друг с другом дугами больших окружностей. Но область Ω_+ выпукла, поэтому кратчайшая геодезическая (меньшая дуга большой окружности), соединяющая точки $\partial\Omega_+$, лежит внутри $\overline{\Omega_+}$. Если геодезическая не кратчайшая, тогда это большая дуга большой окружности, которая выходит за пределы полусферы. Если существует несколько геодезических, то это противоположные точки на сфере, но на $\partial\Omega_+$ нет противоположных точек. Поэтому не существует геодезических на полусфере, соединяющих различные точки $\partial\Omega_+$. Отсюда следует, что g полностью лежит на $\partial\Omega_+$.

Поскольку в сферических координатах для кривой g $|\varphi(0) - \varphi(1)| = 2\pi n$, то каждый меридиан $\varphi \equiv a \pmod{2\pi}$ кривая g пересекает не менее N раз, и через каждую точку $\partial\Omega$ проходит не менее N раз, поэтому ее длина не менее NL_Ω . Поскольку эта кривая кратчайшая, то ее длина равна ровно NL_Ω , иначе кривая, N раз проходящая по границе Ω_+ была бы короче ее. Отсюда

$$L(\tilde{\kappa}) \geq L(\tilde{l}) - |\theta(t_1) - \theta(t_0)| \geq L(g) - |\theta(t_1) - \theta(t_0)| = NL_\Omega - |\theta(t_1) - \theta(t_0)|.$$

◀

Доказательство Теоремы 1.

► Сначала будем считать, что у y нет кратных нулей. Пусть $\left\lfloor \frac{\nu(y, t)}{2} \right\rfloor - 1 = N$, т.е. у функции y не менее, чем $2(N + 1)$ нулей. Это означает, что наша кривая $\kappa(t)$ пересекает $N + 1$ раз дугу $\varphi = 2\pi k$, а это значит, к каждому участку кривой $\kappa(t)$ между 2-мя такими пересечениями можно применить лемму 3, и получим кривую $\tilde{\kappa}$, на которой φ изменяется на ту же величину, длина которой не больше, чем длина κ , но уже не пересекающуюся с Ω_+ , а значит удовлетворяющую лемме 5. Применяя ее и учитывая, что в сферической системе $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, получаем:

$$\gamma_3(y, t) = L(\kappa, [0, t]) \geq L(\tilde{\kappa}) \geq NL_\Omega - |\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}(0)| \geq \left(\left\lfloor \frac{\nu(y, t)}{2} \right\rfloor - 1 \right) L_\Omega - \pi.$$

Учитывая, что отрезок длины $\frac{\pi}{2}$ соединяет две точки $\partial\Omega_+$ $((1, 0, 0)$ и $(0, 0, 1))$, то длина кривой не менее, чем π . Поэтому

$$\gamma_3(y, t) \geq \left(\left\lfloor \frac{\nu(y, t)}{2} \right\rfloor - 1 \right) L_\Omega - \pi \geq \left(\left\lfloor \frac{\nu(y, t)}{2} \right\rfloor - 2 \right) L_\Omega > \frac{\nu(y, t) - 5}{2} L_\Omega.$$

Теперь сведем случай с кратными нулями к уже рассмотренному. Для этого заметим, что на конечном отрезке достигается минимум непрерывной функции $|x(t)|$, причем он не равен 0 (иначе решение было бы $\equiv 0$). Пусть $C := \min_{t \in [0; t_0]} |x(t)|$.

$$\gamma(x, t_0) = \int_0^{t_0} |\dot{\kappa}(t)| dt = \int_0^{t_0} \frac{\sqrt{(\dot{x}, \dot{x})(x, x) + (x, \dot{x})^2}}{|x|^2} dt.$$

Под интегралом функция, непрерывная относительно x и \dot{x} при $|x| \geq C > 0$, а значит равномерно непрерывна на компакте $\{x : |x| + |\dot{x}| \leq M, |x| \geq C > 0\}$. x, \dot{x} ограничены на конечном отрезке, поэтому $\gamma(x, t_0)$ непрерывна по x относительно нормы $\|x\|_{C^1}$, а значит $\gamma_3(y, t_0)$ непрерывна по y относительно нормы $\|y\|_{C^3}$. Поэтому если взять последовательность $y_n \rightarrow y$ в норме $C^3[0; t_0]$ такую, что $\nu(y_n, t) \geq \nu(y, t)$, то $\gamma_3(y, t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_3(y_n, t_0) \geq \left(\left\lfloor \frac{\nu(y, t)}{2} \right\rfloor - 1 \right) L_\Omega - \pi$. Далее будем строить такую последовательность.

Пусть $(t_i)_{i=1}^m$ — точки, в которых $y = \dot{y} = 0$. Их конечное число, иначе была бы предельная точка, и в ней $\ddot{y} = 0$, но тогда $y \equiv 0$. Положим $y_n = y + \frac{1}{n} \Delta y$, где

$$\begin{aligned} \Delta y(t_i) &= -\text{sign } \ddot{y}(t_i), \\ \Delta \dot{y}(t_i) &= \Delta \ddot{y}(t_i) = \Delta \ddot{y}'(t_i) = 0; \\ \Delta y(t) &= -\text{sign } \ddot{y}(t_1), t < t_1, \\ \Delta y(t) &= -\text{sign } \ddot{y}(t_m), t > t_m. \end{aligned}$$

На отрезках $[t_i; t_{i+1}]$ функция Δy определяется многочленом степени 7 по двум точкам и трем производным в них, исходя из первых двух условий. Тогда по построению $\Delta y \in C^3$ и при достаточно большом n функция $y + \frac{1}{n} \Delta y$ имеет нулей не меньше, чем y , но нет кратных, что и требовалось. ◀

Основная лемма 1 $\forall \varepsilon > 0$ существуют гладкие функции $a(t), b(t), c(t)$ такие, что существует решение $y(t)$ уравнения (*), для которого выполнено:

$$\nu(y) \neq 0 \text{ и } \frac{\mu_3(y)}{\nu(y)} < \frac{L_\Omega}{2\pi} + \varepsilon.$$

► Рассмотрим такую функцию, для которой проекция фазовой кривой на сферу является замкнутой кривой, близкой к $\partial\Omega_+$. Для этого сначала зададим саму эту проекцию в сферической системе: $\theta = F(\varphi)$ так, чтобы график F был вне $\bar{\Omega}_+$, но его длина была $L_\Omega + \delta$, это можно сделать, если взять гладкую¹ F , приближающую снизу

¹можно взять и кусочно-гладкую F , но тогда коэффициенты уравнения будут разрывными по t

функцию $\theta_0(\varphi)$, задающую $\partial\Omega_+$. Для разность длин кривых $\theta = f(\varphi)$ и $\theta = g(\varphi)$ на сфере будет такая формула:

$$\oint_{\gamma_f} ds - \oint_{\gamma_g} ds = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{f'^2 + \cos^2 f} - \sqrt{g'^2 + \cos^2 g} \right) d\varphi \leq \int_0^{2\pi} (|f' - g'| + |f - g|) d\varphi, \quad (8)$$

т.к.

$$ds^2 = d\theta^2 + d\varphi^2 \cos^2 \theta,$$

а второе неравенство выполнено, поскольку:

$$\begin{aligned} |\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}| &= \frac{|a^2 + b^2 - c^2 - d^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} \leq \frac{|a^2 - c^2| + |b^2 - d^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} \leq \\ &\leq \frac{|a^2 - c^2|}{|a| + |c|} + \frac{|b^2 - d^2|}{|b| + |d|} \leq ||a| - |c|| + ||b| - |d|| \leq |a - c| + |b - d|. \end{aligned}$$

Пусть F — гладкая функция, которая приближает функцию $\tilde{\theta}_0 - \frac{\delta}{4\pi}$ с точностью $\frac{\delta}{16\pi}$ по норме W_1^1 , где $\tilde{\theta}_0(\varphi) = \begin{cases} \theta_0(\varphi), & \varphi \in (-\pi/2, \pi/2); \\ \frac{\pi}{2}, & \text{иначе.} \end{cases}$

Тогда везде $F(\varphi) \leq \tilde{\theta}_0(\varphi) - \frac{\delta}{4\pi} + \frac{\delta}{8\pi} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{8\pi}$. Из (8) получаем, что

$$\left| \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi - L_\Omega \right| = \left| \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi - \int_0^{2\pi} \theta_0(\varphi) d\varphi \right| \leq 2\pi \frac{\delta}{4\pi} + \frac{\delta}{16\pi} < \delta.$$

Далее поскольку $(\varphi, F(\varphi)) \notin \bar{\Omega}$, то по определению Ω это означает, что $y\ddot{y} - \dot{y}^2 < 0$, или, что то же самое, $\dot{\varphi} = \frac{y\ddot{y} - \dot{y}^2}{y^2 + \dot{y}^2} < 0$. Выразим $\dot{\varphi}$ через φ и θ :

$$\dot{\varphi} = \frac{y\ddot{y} - \dot{y}^2}{y^2 + \dot{y}^2} = \frac{\sin \theta \cos \varphi \cos \theta - (\sin \varphi \cos \theta)^2}{\underbrace{(\cos \varphi \cos \theta)^2 + (\sin \varphi \cos \theta)^2}_{\cos^2 \theta}} = \operatorname{tg} \theta \cos \varphi - \sin^2 \varphi. \quad (9)$$

Учитывая, что $\theta = F(\varphi)$, и переворачивая обе части равенства, получаем:

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta \cos \varphi - \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg} F(\varphi) \cos \varphi - \sin^2 \varphi} < 0.$$

Пусть $\varphi(0) = \pi$. Тогда $t(\varphi) = \int_\pi^\varphi \frac{d\varphi}{\operatorname{tg} F(\varphi) \cos \varphi - \sin^2 \varphi} \downarrow$. Так как функция F периодическая по φ , с периодом 2π (т.к. ее график на сфере — замкнутая кривая), то $t(2\pi k + \pi) = kt(3\pi) \rightarrow \infty, k \rightarrow -\infty$. Отсюда и из строгой монотонности следует, что обратная функция $\varphi_0(t)$ определена всюду на $[0; +\infty)$ и $\varphi_0(t) \rightarrow -\infty, t \rightarrow +\infty$. Найдём уравнение на функцию y , соответствующую такой кривой на сфере. Для этого посчитаем $\dot{\theta}$ через производные y . $\theta = \arctan \frac{\dot{y}}{\sqrt{y^2 + \dot{y}^2}}$, значит

$$\dot{\theta} = \frac{\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{y^2 + \dot{y}^2}} \right)'}{1 + \frac{\dot{y}^2}{y^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\ddot{y} \sqrt{y^2 + \dot{y}^2} - \frac{\dot{y}(y\dot{y} + \dot{y}\ddot{y})}{\sqrt{y^2 + \dot{y}^2}}}{y^2 + \dot{y}^2 + \ddot{y}^2}.$$

Отсюда выражаем \ddot{y} , учитывая, что $\frac{y}{\sqrt{y^2+\dot{y}^2}} = \cos \varphi$, $\frac{\dot{y}}{\sqrt{y^2+\dot{y}^2}} = \sin \varphi$, $\frac{\ddot{y}}{\sqrt{y^2+\dot{y}^2}} = \operatorname{tg} \theta$:

$$\ddot{y} = \frac{\dot{\theta}(y^2 + \dot{y}^2 + \ddot{y}^2)}{\sqrt{y^2 + \dot{y}^2}} + \frac{\ddot{y}(y\dot{y} + \dot{y}\ddot{y})}{y^2 + \dot{y}^2} = \dot{\theta}(y \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi + \ddot{y} \operatorname{tg} \theta) + \ddot{y}(\sin \varphi(\cos \varphi + \operatorname{tg} \theta)).$$

Приводя подобные, получаем уравнение для y :

$$\ddot{y} = \dot{\theta} \cos \varphi y + \dot{\theta} \sin \varphi \dot{y} + (\dot{\theta} \operatorname{tg} \theta + \sin \varphi(\cos \varphi + \operatorname{tg} \theta)) \ddot{y}. \quad (10)$$

Учитывая, что $\varphi = \varphi_0(t)$, $\theta = F(\varphi_0(t)) =: \Theta_0(t)$, получаем, что это линейное уравнение с коэффициентами, гладкость которых зависит от гладкости F :

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= A(t)y + B(t)\dot{y} + C(t)\ddot{y}, \\ A(t) &= \dot{\Theta}_0(t) \cos \varphi_0(t), \\ B(t) &= \dot{\Theta}_0(t) \sin \varphi_0(t), \\ C(t) &= \dot{\Theta}_0(t) \operatorname{tg} \Theta_0(t) + \sin \varphi_0(t)(\cos \varphi_0(t) + \operatorname{tg} \Theta_0(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

$|F(x)| < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\operatorname{tg} \Theta_0(t) = \operatorname{tg} F(\varphi_0(t))$ определен и непрерывен всюду. Проверим, что есть решение этого уравнения, для которого след на сфере будет иметь сферические координаты (φ_0, θ_0) . Возьмем y_0 — решение уравнения (11) с начальными данными: $y(0) = -1$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) = \operatorname{tg} F(\pi)$, тогда $\varphi(0) \equiv \pi \equiv \varphi_0(0) \pmod{2\pi}$ — согласуется условием на функцию $\varphi_0(t)$. Исходя из равенств (9) и (10) и начальных условий, для углов сферической системы координат будут выполняться уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \operatorname{tg} \theta \cos \varphi - \sin^2 \varphi, & \varphi(0) = \pi; \\ \dot{\theta} = \frac{\ddot{y}_0 - \ddot{y}_0 \sin \varphi(\cos \varphi + \operatorname{tg} \theta)}{y_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi + \ddot{y}_0 \operatorname{tg} \theta}, & \theta(0) = F(\pi). \end{cases}$$

Те же уравнения будут выполняться для функций φ_0 и Θ_0 по построению уравнения (11). Заметим, что на решении знаменатель правой части второго уравнения будет иметь вид:

$$y_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi + \ddot{y}_0 \operatorname{tg} \theta = \frac{y_0^2 + \dot{y}_0^2 + \ddot{y}_0^2}{y_0^2 + \dot{y}_0^2},$$

и нигде не обращается в 0. Поэтому в окрестности решения правые части уравнения (11) непрерывны, поэтому оно единственно. Из единственности решения задачи Коши, получим, что $\varphi(t) = \varphi_0(t)$, $\theta(t) = \Theta_0(t)$.

Посчитаем $\frac{\mu_3(y)}{\nu(y)}$. Пусть $T := -t(3\pi)$. Так как T — период проекции фазовой кривой на сфере, то $\gamma_3(y, nT) = n\gamma_3(y, T) \leq n(L_\Omega + \frac{3}{4}\delta)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mu_3(y) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_3(y, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_3(y, \lfloor \frac{t}{T} \rfloor T) + O(1)}{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor T + O(1)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor (L_\Omega + \delta)}{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor T} = \frac{L_\Omega + \delta}{T}; \\ \nu(y) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi \nu(y, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi \nu(y, \lfloor \frac{t}{T} \rfloor T) + O(1)}{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor T + O(1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\pi \lfloor \frac{t}{T} \rfloor + O(1)}{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor T} = \frac{2\pi}{T}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что на каждом периоде длиной T есть ровно 2 корня: при $\varphi \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ и $\varphi \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Поэтому $\nu(y, nT) = 2n$.

$$\frac{\mu_3(y)}{\nu(y)} < \frac{L_\Omega + \delta}{2\pi}.$$

Выберем $\delta < 2\pi\varepsilon$, и утверждение основной леммы будет выполнено.

Доказательство теоремы 2. ◀

► Докажем, что это нижняя оценка. Сначала для первого отношения: будем считать, что $\hat{\nu} \neq 0$. Тогда $\exists \{t_n\} : \hat{\nu}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t_n} \nu(x, t_n)$. По свойству верхнего предела, и подставляя оценку из основной леммы 1, получаем требуемое:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(x) &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x, t)}{t} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x, t_n)}{t_n} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \frac{\nu(x, t_n) - 5}{2} L_\Omega = \\ &= L_\Omega \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\nu(x, t_n)}{2t_n} + \frac{O(1)}{t_n} \right) = L_\Omega \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(x, t_n)}{2t_n} = \frac{L_\Omega}{2\pi} \hat{\nu}(x). \end{aligned}$$

Для второго соотношения все аналогично, только нужно взять $t_n : \check{\mu}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x, t_n)}{t_n}$. По теореме 1 $\nu(x, t) < \frac{2\gamma(x, t)}{L_\Omega} + 5$, откуда можно вывести требуемое:

$$\begin{aligned} \check{\nu}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t_n} \nu(x, t_n) \leq \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\gamma(x, t_n) + 5}{t_n L_\Omega} = \\ &= \frac{2\pi}{L_\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x, t_n) + O(1)}{t_n} = \frac{2\pi}{L_\Omega} \check{\mu}. \end{aligned}$$

Из основной леммы 1 следует, что $\frac{\mu(x)}{\nu(x)}$ может быть сколь угодно близко к $\frac{L_\Omega}{2\pi}$, поэтому оценку нельзя улучшить. ◀

Добавление: вычисление постоянной L

Было показано, что $\partial\Omega_+$ в сферических координатах задается формулой

$$\theta = \theta_0(\varphi) = \arctan \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Поэтому, получаем:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cos^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2 = (\cos^2 \theta_0(\varphi) + \theta_0'^2(\varphi)) d\varphi^2 = \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0} + \left(\frac{\left(\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right)'}{1 + \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi}} \right)^2 \right) d\varphi^2 = \\ &= \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi} + \frac{(2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + \sin^3 \varphi)^2}{(\cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi)^2} \right) d\varphi^2 = \\ &= \frac{\cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi) + \sin^2 \varphi (2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2}{(\cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi)^2} d\varphi^2. \end{aligned}$$

Преобразуем по отдельности числитель и знаменатель полученного выражения:

$$\cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi) + \sin^2 \varphi (2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 = \cos^4 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi (1 + \cos^2 \varphi)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \sin^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + \cos^4 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi = \sin^2 \varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{2} + \\
&+ \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)) = 1 + \frac{\sin^2 2\varphi}{2} = 1 + \frac{1 - \cos 4\varphi}{4} = \frac{5 - \cos 4\varphi}{4}; \\
\cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) = 1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \frac{4 - \sin^2 2\varphi}{4} = \frac{7 + \cos 4\varphi}{8}.
\end{aligned}$$

Итак, получаем:

$$ds^2 = \frac{5 - \cos 4\varphi}{4 \left(\frac{7 + \cos 4\varphi}{8}\right)^2} d\varphi^2 = 16 \frac{5 - \cos 4\varphi}{(7 + \cos 4\varphi)^2} d\varphi^2.$$

Отсюда находим длину кривой:

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \frac{\sqrt{5 - \cos 4\varphi}}{7 + \cos 4\varphi} d\varphi = \langle \alpha = 4\varphi \rangle = \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sqrt{5 - \cos \alpha}}{7 + \cos \alpha} d\alpha = 4 \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{5 - \cos \alpha}}{7 + \cos \alpha} d\alpha$$

В последнем равенстве мы учли периодичность и четность косинуса.

Список литературы

- [1] Дж. Милнор. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
- [2] А.Н. Сергеев. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы.